Elemente der Maß- und Integrationstheorie

Götz Kersting

8. Dezember 2004

1 Meßbarkeit

Maße und Integrale behandelt man im Rahmen von meßbaren Räumen und Funktionen.

Definition. *Ein System $\mathcal{B}$ von Teilmengen einer Menge $S \neq \emptyset$ mit den Eigenschaften*

i) $S \in \mathcal{B}$,

ii) $B \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad B^c \in \mathcal{B}$,

iii) $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$ *für jede endliche oder unendliche Folge* $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$

*nennt man eine **σ-Algebra** in S. Das Paar $(S, \mathcal{B})$ heißt **meßbarer Raum**.*

Eine σ-Algebra $\mathcal{B}$ enthält dann auch $\emptyset = S^c$ und $\bigcap_n B_n = (\bigcup_n B_n^c)^c$ für $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$. Die Elemente von $\mathcal{B}$ bezeichnet man als die **meßbaren Teilmengen** von S.

Definition. *Seien $(S, \mathcal{B})$, $(S', \mathcal{B}')$ meßbare Räume. Dann heißt $\phi : S \to S'$ eine **$\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-meßbare Abbildung**, falls Urbilder von meßbaren Mengen wieder meßbar sind, falls also gilt*

$$\phi^{-1}(B') \in \mathcal{B} \quad \text{für alle } B' \in \mathcal{B}'.$$

Normalerweise ist klar, welche σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf einer Grundmenge S gemeint ist, welches also die meßbaren Teilmengen von S sind. Wir sprechen deswegen auch kürzer von meßbaren Abbildungen $\phi : S \to S'$ und werden später die zugehörigen σ-Algebren nicht mehr explizit erwähnen.

Proposition 1.1. *Seien $(S, \mathcal{B})$, $(S', \mathcal{B}')$ und $(S'', \mathcal{B}'')$ meßbare Räume, und seien $\phi : S \to S'$ eine $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-meßbare und $\psi : S' \to S''$ eine $\mathcal{B}'$-$\mathcal{B}''$-meßbare Abbildung. Dann ist $\psi \circ \phi : S \to S''$ eine $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}''$-meßbare Abbildung.*

Beweis. Ist B'' meßbare Teilmenge von S'', so ist nach Annahme $B' := \psi^{-1}(B'')$ meßbar in S' und folglich $(\psi \circ \phi)^{-1}(B'') = \phi^{-1}(B')$ meßbar in S. □

Notation. Es sind folgende Notationen gebräuchlich.

$$\{\phi \in B'\} \;:=\; \{x \in S : \phi(x) \in B'\} \;=\; \phi^{-1}(B')$$

für Abbildungen $\phi : S \to S'$ und Mengen $B' \subset S'$, ähnlich

$$\{\phi = x'\} \;:=\; \{x \in S : \phi(x) = x'\} \quad , \quad \{\phi \leq x'\} \;:=\; \{x \in S : \phi(x) \leq x'\} \;,$$

etc. für $x' \in S'$ (die zweite Gleichung, sofern S' geordnet ist),

$$\{\phi_1 = \phi_2\} \ := \ \{x \in S : \phi_1(x) = \phi_2(x)\}$$

für zwei Abbildungen ϕ_1, ϕ_2 von S nach S', und ähnlich

$$\{\phi_1 \leq \phi_2\} \quad , \quad \{\phi_1 < \phi_2\}$$

etc., schließlich für Abbildungen $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots$ von S nach S'

$$\begin{aligned} \{\lim_n \phi_n = \phi\} \ &:= \ \{x \in S : \lim_n \phi_n(x) = \phi(x)\} \ , \\ \{\lim_n \phi_n \text{ existiert}\} \ &:= \ \{x \in S : \lim_n \phi_n(x) \text{ existiert}\} \end{aligned}$$

etc., falls S' metrischer Raum ist. Wir werden sehen, daß diese Mengen unter geeigneten Umständen meßbar sind.

Zur Konstruktion von $\boldsymbol{\sigma}$-Algebren

In einer abzählbaren Menge S wählen wir die σ-Algebra immer als die Potenzmenge, die Menge aller Teilmengen von S, für überabzählbare Mengen hat sich dieses Vorgehen jedoch als ungeeignet erwiesen. Stattdessen konstruiert man σ-Algebren durch Erzeuger. Ein System von Teilmengen $\mathcal{E}$ von S heißt **Erzeuger** der σ-Algebra $\mathcal{B}$ in S, falls $\mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra in S ist, die $\mathcal{E}$ umfaßt. Wichtig ist die Beobachtung, daß jedes System $\mathcal{E}$ von Teilmengen von S eine σ-Algebra erzeugt, die wir mit $\sigma(\mathcal{E})$ bezeichnen wollen. Man erhält sie als den Durchschnitt aller $\mathcal{E}$ umfassenden σ-Algebren in S,

$$\sigma(\mathcal{E}) \ = \ \{B \subset S \ : \ B \in \widetilde{\mathcal{B}} \text{ für jede } \sigma\text{-Algebra } \widetilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{E} \text{ in } S\}$$

(man beachte, daß es immer eine $\mathcal{E}$ umfassende σ-Algebra gibt, nämlich das System *aller* Teilmengen von S). Dies ist eine höchst indirekte Konstruktion, die im allgemeinen keinen Anhalt gibt, welche Teilmengen von S zu $\sigma(\mathcal{E})$ gehören und welche nicht. Das ist aber nicht besonders störend. So hat man zum Nachweis der Meßbarkeit von Abbildungen das folgende Kriterium zur Hand.

Proposition 1.2. *Seien $(S, \mathcal{B})$, $(S', \mathcal{B}')$ meßbare Räume, und sei $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}'$. Dann ist $\phi : S \to S'$ eine $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-meßbare Abbildung, falls gilt*

$$\phi^{-1}(B') \in \mathcal{B} \quad \textit{für alle } B' \in \mathcal{E}'.$$

Beweis. $\widetilde{\mathcal{B}} := \{B' \in \mathcal{B}' : \phi^{-1}(B') \in \mathcal{B}\}$ ist, wie eine kurze Rechnung zeigt, eine σ-Algebra. Nach Annahme gilt $\mathcal{E}' \subset \widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}'$. Da $\mathcal{B}'$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ umfaßt, folgt $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}'$. Dies ist die Behauptung. □

Beispiel. Euklidische Räume. Die **Borel-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** $\mathcal{B}^d$ im $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, ist definiert als die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^d$ umfaßt. Ihre Elemente heißen **Borel-Mengen**. Borel-Mengen sind neben den offenen Mengen alle abgeschlossenen Mengen und die abzählbaren Mengen (und überhaupt jede „explizit angebbare“ Menge, zur Konstruktion einer nicht-Borelschen Menge benötigt man nämlich das Auswahlaxiom der Mengenlehre). $\mathcal{B}^d$ wird offenbar auch von den abgeschlossenen Mengen erzeugt, außerdem vom System aller offenen ϵ-Umgebungen

$$U_\epsilon(x) \ := \ \{y \in \mathbb{R}^d \ : \ |y - x| < \epsilon\}, \qquad \epsilon > 0 \ , x \in \mathbb{R}^d \ ,$$

denn jede offene Menge O läßt sich als abzählbare Vereinigung solcher Umgebungen darstellen,

$$O \ = \ \bigcup \{U_\epsilon(x) \ : \ U_\epsilon(x) \subset O, \ \epsilon \in \mathbb{Q}_+, \ x \in \mathbb{Q}^d\} \ .$$

Im 1-dimensionalen Fall wird die Borel-σ-Algebra auch vom System aller Intervalle $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ erzeugt. Aus diesen Intervallen läßt sich nämlich jedes offene Intervall (und damit jede ϵ-Umgebung in $\mathbb{R}$) in abzählbarer Weise darstellen,

$$(x, y) \ = \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, y - \tfrac{1}{n}] \cap (-\infty, x]^c \ .$$

Eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ heißt **Borel-meßbar**, wenn $\phi^{-1}(B)$ eine Borelsche Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^m$. Nach Proposition 1.2 langt es, daß diese Bedingung für alle offenen Mengen $B \subset \mathbb{R}^m$ gilt. Dies liefert uns eine erste große Klasse von Borel-meßbaren Abbildungen, die *stetigen Abbildungen*. Für stetiges ϕ und offenes B ist nämlich $\phi^{-1}(B)$ ebenfalls offen und damit Borel-Menge. Ähnlich ist jede *monotone Abbildung* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar, denn das Urbild eines Intervalls unter ϕ ist wieder ein Intervall und damit Borel-meßbar. □

Ähnlich lassen sich σ-Algebren mittels Abbildungen konstruieren. Seien $(S_i, \mathcal{B}_i)$, $i \in I$, meßbare Räume und seien $\psi_i : S' \to S_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann können wir die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}'$ in S' betrachten, bzgl. der die ψ_i alle $\mathcal{B}'$-$\mathcal{B}_i$-meßbare Abbildungen sind. Sie heißt die **von $(\boldsymbol{\psi_i})$ erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** und wird mit $\mathcal{B}' = \sigma(\psi_i, i \in I)$ bezeichnet. Die Proposition 1.2 entsprechende Aussage lautet folgendermaßen.

Proposition 1.3. *Seien $(S, \mathcal{B})$, $(S', \mathcal{B}')$ und $(S_i, \mathcal{B}_i)$, $i \in I$, meßbare Räume und sei $\mathcal{B}'$ von den Abbildungen $\psi_i : S' \to S_i$, $i \in I$, erzeugt. Dann ist eine Abbildung $\phi : S \to S'$ genau dann $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-meßbar, wenn $\psi_i \circ \phi$ für alle i $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_i$-meßbar sind.*

Beweis. Die eine Richtung folgt aus Proposition 1.1. Sei umgekehrt $\psi_i \circ \phi$ für alle i meßbar. Dann gilt $\phi^{-1}(\psi_i^{-1}(B_i)) \in \mathcal{B}$ für alle $B_i \in \mathcal{B}_i$. Nach Annahme erzeugen die Mengen $\psi_i^{-1}(B_i)$ die σ-Algebra $\mathcal{B}'$. Die Meßbarkeit von ϕ folgt daher aus Proposition 1.2. $\square$

Produkträume

Wir betrachten nun σ–Algebren auf endlichen oder abzählbar unendlichen kartesischen Produkten

$$S_\times \;=\; S_1 \times S_2 \times \cdots$$

Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ σ–Algebren auf $S_1, S_2, \ldots$ Teilmengen von $S_\times$ der Gestalt

$$B_1 \times B_2 \times \cdots \qquad \text{mit} \qquad B_n \in \mathcal{B}_n$$

nennen wir dann **meßbare Quader**. Die von allen meßbaren Quadern erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}_\otimes$ in $S_\times$ heißt **Produkt-σ-Algebra** der $\mathcal{B}_i$. Man schreibt

$$\mathcal{B}_\otimes \;=\; \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \cdots$$

und nennt $(S_\times, \mathcal{B}_\otimes)$ den **Produktraum** der $(S_n, \mathcal{B}_n)$.

Alternativ kann man die Produkt-σ-Algebra mit Hilfe der **Projektionsabbildungen** $\pi_n : S_\times \;\to\; S_n$ beschreiben, gegeben durch

$$\pi_n(x_1, x_2, \ldots) \;:=\; x_n \;, \quad x_n \in S_n \;.$$

Wegen $\pi_n^{-1}(B_n) = S_1 \times \ldots \times S_{n-1} \times B_n \times S_{n+1} \times \cdots$ ist π_n eine $\mathcal{B}_\otimes$-$\mathcal{B}_n$-meßbare Abbildung. Weiter gilt $B_1 \times B_2 \times \cdots = \pi_1^{-1}(B_1) \cap \pi_2^{-1}(B_2) \cap \cdots$, daher läßt sich die Produkt-σ-Algebra auch als die von allen Projektionsabbildungen erzeugte σ-Algebra charakterisieren.

Beispiel. Euklidische Räume. Die σ-Algebra $\mathcal{B}^d$ im $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, kann man wahlweise als Borel-σ-Algebra (also als von den offenen Mengen erzeugt) oder als Produkt-σ-Algebra auffassen, denn auf $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_k}$ gilt die Formel

$$\mathcal{B}^d \;=\; \mathcal{B}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^{d_k} \tag{1}$$

mit $d = d_1 + \cdots + d_k$. Zum *Beweis* beachten wir, daß jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^d$ abzählbare Vereinigung von meßbaren Quadern ist,

$$O \;=\; \bigcup \{U_\epsilon(x_1) \times \cdots \times U_\epsilon(x_k) \;: \\ U_\epsilon(x_1) \times \cdots \times U_\epsilon(x_k) \subset O,\; \epsilon \in \mathbb{Q}_+,\; x_i \in \mathbb{Q}^{d_i}\} \;.$$

Daher gehört O zur Produkt-σ-Algebra. Da $\mathcal{B}^d$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen enthält, folgt $\mathcal{B}^d \subset \mathcal{B}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^{d_k}$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir für $i = 1, \ldots, k$ die Mengensysteme $\mathcal{B}_i$ aller $B_i \in \mathcal{B}^{d_i}$ mit der Eigenschaft $\mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times B_i \times \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_k} \in \mathcal{B}^d$. $\mathcal{B}_i$ ist offenbar eine σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält. Da $\mathcal{B}^{d_i}$ die kleinste σ-Algebra dieser Eigenschaft ist, erhalten wir $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}^{d_i}$. Es folgt

$$B_1 \times \cdots \times B_k \;=\; \bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_{i-1}} \times B_i \times \mathbb{R}^{d_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_k} \;\in\; \mathcal{B}^d$$

für $B_i \in \mathcal{B}^{d_i}$. Da die Produkt-$\sigma$-Algebra die kleinste σ-Algebra ist, die alle meßbaren Quader umfaßt, folgt $\mathcal{B}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^{d_k} \subset \mathcal{B}^d$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Beispiel. Numerische Abbildungen. Abbildungen in die erweiterte reelle Achse $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ werden manchmal als numerische Abbildungen bezeichnet. Wir versehen $\overline{\mathbb{R}}$ mit der σ–Algebra

$$\overline{\mathcal{B}} \;:=\; \{B \subset \overline{\mathbb{R}} \mid B \cap \mathbb{R} \text{ ist Borel-Menge in } \mathbb{R}\}\ ,$$

sie heißt die **Borel–$\boldsymbol{\sigma}$–Algebra** in $\overline{\mathbb{R}}$, und $\overline{\mathbb{R}}^d$ mit der Produkt–σ–Algebra $\overline{\mathcal{B}}^d$ (mit $d \in \mathbb{N}$ oder $d = \infty$). Dann ist die Abbildung $\sup : \overline{\mathbb{R}}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, die jeder Folge (x_n) ihr Supremum zuordnet, eine $\overline{\mathcal{B}}^d$–$\overline{\mathcal{B}}$–meßbare Abbildung. Dies folgt aus

$$\sup{}^{-1}([-\infty, x]) \;=\; [-\infty, x] \times [-\infty, x] \times \cdots\ ,$$

Proposition 1.2 und der Tatsache, daß $\overline{\mathcal{B}}$ (ähnlich wie die Borel–σ–Algebra auf der reellen Achse) von den Intervallen $[-\infty, x]$ erzeugt wird. □

Produkt-σ-Algebren haben die wichtige Eigenschaft, daß zusammengesetzte Abbildungen in ein kartesisches Produkt genau dann meßbar sind, wenn dies für alle ihre Komponenten gilt.

Proposition 1.4. *Sei $(S, \mathcal{B})$ meßbarer Raum und seien $\phi_n : S \to S_n$ Abbildungen für $n = 1, 2, \ldots$. Dann ist die Abbildung $\phi := (\phi_1, \phi_2, \ldots)$ von S nach $S_\times$ genau dann $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_\otimes$-meßbar, wenn alle ϕ_n $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_n$-meßbar sind.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Proposition 1.3, denn $\phi_n = \pi_n \circ \phi$. □

Zusammensetzen von meßbaren Abbildungen

Nach Proposition 1.1 und 1.4 ist jede Abbildung der Gestalt $\phi(\phi_1, \phi_2, \ldots)$ messbar, sofern das für $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots$ gilt. Damit läßt sich die Meßbarkeit einer Anzahl von Abbildungen und Mengen feststellen.

So ist mit $f_i : S \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ auch $f_1 + f_2$ meßbare Funktion (in Euklidischen Räumen wird immer die Borel–σ–Algebra betrachtet). Dies folgt aus der Darstellung

$$f_1 + f_2 \ = \ \phi(f_1, f_2) \ ,$$

wobei $\phi(x,y) := x+y$ aufgrund von Stetigkeit eine Borel–messbare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist. Genauso erhält man die Meßbarkeit von

$$f_1 - f_2 \ , \quad f_1 \cdot f_2 \ , \quad \max(f_1, f_2) \ , \quad |f_1| = \max(f, 0) + \min(f, 0)$$

etc. Die Meßbarkeit der Menge $\{f_1 = f_2\}$ ergibt sich aus Proposition 1.4 und der Darstellung

$$\{f_1 = f_2\} \ = \ (f_1, f_2)^{-1}(D)$$

mit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, denn D ist als abgeschlossene Menge Borel–meßbar. Analog erhält man die Borel–Meßbarkeit von Mengen wie

$$\{f_1 \neq f_2\} \ , \quad \{f_1 \leq f_2\} \ , \quad \{f_1 < f_2\} \ .$$

Genauso lassen sich unendliche Folgen $f_1, f_2, \ldots$ meßbarer Funktionen von S nach $\mathbb{R}$ zu neuen meßbaren Funktionen kombinieren (wobei man gegebenenfalls $\mathbb{R}$ zu $\overline{\mathbb{R}}$ erweitert). Wir haben gezeigt, daß die Abbildung $\sup : \overline{\mathbb{R}}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ und analog die Abbildung inf meßbar sind, deswegen sind mit $f_1, f_2, \ldots$ auch

$$\sup_n f_n \ , \ \inf_n f_n$$

meßbar. Es folgt die Meßbarkeit der Funktionen

$$\limsup_n f_n = \inf_m \sup_{n \geq m} f_n \ , \ \liminf_n f_n = \sup_m \inf_{n \geq m} f_n$$

und der Menge $\{\lim_n f_n \text{ existiert}\}$, denn

$$\{\lim_n f_n \text{ existiert}\} \ = \ \{\limsup_n f_n = \liminf_n f_n\} \ .$$

Ist die Komplementärmenge leer, so gilt $\lim_n f_n = \limsup_n f_n$, und $\lim_n f_n$ ist eine meßbare Funktion.

Das Standardmodell für Zufallsvariable

Messbare Abbildungen haben Eigenschaften, wie man sie für Zufallsvariable erwartet und benötigt. Das Standardmodell für reellwertige Zufallsvariable sieht deswegen folgendermaßen aus.

Zugrunde liegt ein meßbarer Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, den wir dann Ereignisraum nennen. Die σ–Algebra heißt **Ereignisfeld**, ihre Elemente **Ereignisse**. Spezielle Ereignisse sind: das sichere Ereignis Ω, das unmögliche Ereignis $\emptyset$. In diesem Setting ist eine **reellwertige Zufallsvariable** $\boldsymbol{X}$ eine meßbare Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \ .$$

Speziell ist die charakteristische Funktion 1_A für jedes Ereignis A meßbar, sie heißt die **Indikatorvariable** I_A. Die formal wichtigen Eigenschaften von Zufallsvariablen sind:

i) Jede Zufallsvariable mit Werten in S läßt sich mittels einer meßbaren Abbildung $\phi : S \to S'$ in eine Zufallsvariable

$$\phi(X) \ = \ \phi \circ X$$

transformieren.

ii) Endlich oder unendlich viele Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ lassen sich zur **Produktvariablen**

$$X \ = \ (X_1, X_2, ...)$$

mit Werten in einem kartesischen Produkt zusammensetzen.

Damit kann man nach unseren Erörterungen Ereignisse der Gestalt

$$\{X \in B\} \quad , \quad \{X = Y\} \quad , \quad \{X \neq Y\}$$

etc. erhalten und etwa aus reellwertigen Zufallvariablen $X_1, X_2, \ldots$ neue Zufallsvariable wie

$$X_1 + X_2 \ , \ X_1 \cdot X_2 \ , \ \max(X_1, X_2) \ , \ |X_1| \ , \ \sup_n X_n$$

bilden.

2 Maße

Im Kontext von meßbaren Räumen und Abbildungen, bzw. von Ereignisfeldern und Zufallsvariablen können wir nun Maße behandeln.

Definition. *Sei $(S, \mathcal{B})$ ein meßbarer Raum. Eine Abbildung μ, die jedem $B \in \mathcal{B}$ eine Zahl $\mu(B) \geq 0$ (möglicherweise ∞) zuordnet, heißt* ***Maß****, falls gilt:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) *μ ist* ***σ-additiv****, d.h. es gilt $\mu\big(\bigcup_n B_n\big) = \sum_n \mu(B_n)$ für jede endliche oder unendliche Folge $B_1, B_2, \ldots$ von paarweise disjunkten Ereignissen.*

Gilt $\mu(S) = 1$, so heißt μ ***Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß)****. Allgemeiner heißt μ* ***endlich****, falls $\mu(S) < \infty$, und* ***σ-endlich****, falls es meßbare Mengen $B_1, B_2, \ldots$ gibt, so daß $\bigcup_n B_n = S$ und $\mu(B_n) < \infty$ für alle n gilt.*

Das Tripel $(S, \mathcal{B}, \mu)$ heißt **Maßraum**. Im Falle eines W-Maßes $\mathbf{P}$ auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, mit dem man ein Ereignisfeld beschreibt, benutzen wir eine etwas andere Notation, dann schreiben wir $\mathbf{P}\{A\}$ für die zum Ereignis A gehörige Wahrscheinlichkeit. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ heißt dann **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Beispiele und Bemerkungen.

1. Ein **Dirac-Maß** δ ist ein W-Maß, das anschaulich gesprochen seine Gesamtmasse in einem einzigen Atom konzentriert. Formal bedeutet dies, daß $\delta(B)$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Das Dirac-Maß δ_x in dem Punkt $x \in S$ eines meßbaren Raumes ist definiert als

$$\delta_x(B) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in B\,, \\ 0\,, & \text{falls } x \notin B\,. \end{cases}$$

2. Auf einer abzählbaren Menge S ist jedes Maß μ durch seine **Gewichte** μ_x, $x \in S$, gegeben, gemäß der Formel

$$\mu(B) \;=\; \sum_{x \in B} \mu_x\,, \qquad B \subset S\,.$$

3. **Das Lebesgue-Borel-Maß.** Wie wir später zeigen, gibt es auf der Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ ein eindeutiges, σ-endliches Maß λ^d mit der Eigenschaft

$$\lambda^d\big([x_1, y_1] \times \cdots \times [x_d, y_d]\big) \;=\; (y_1 - x_1) \cdots (y_d - x_d)\,,$$

für alle $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, d$.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ W-Raum und X Zufallsvariable mit Werten in S. Dann ist durch (für $\mathbf{P}\{\{X \in B\}\}$ schreiben wir kürzer $\mathbf{P}\{X \in B\}$)
$$\mu_X(B) := \mathbf{P}\{X \in B\}$$
ein W-Maß μ_X auf der σ-Algebra der meßbaren Mengen in S gegeben. μ_X heißt die **Verteilung** von X und wird auch mit $\mathcal{L}(X)$ bezeichnet. Ist $X = (X_1, X_2, \ldots)$ Produktvariable, so heißt $\mu_X = \mu_{X_1,X_2,\ldots}$ die **gemeinsame Verteilung** von $X_1, X_2, \ldots$

5. Ereignisse A vom Maß 0 heißen **Nullereignisse**. Man sagt dann, daß das Komplementärereignis von A **fast sicher (f.s.)** eintritt. So gilt für zwei reellwertige Zufallsvariable $X = Y$ *f.s.*, falls $\mathbf{P}\{X \neq Y\} = 0$. □

Die folgende Proposition faßt wesentliche Eigenschaften von Maßen zusammen (Beweis als Übung).

Proposition 2.1. *Für jedes Maß μ und $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ gilt:*

i) ***Monotonie.*** *$\mu(B_1) \leq \mu(B_2)$, falls $B_1 \subset B_2$.*

ii) ***σ-Subadditivität.*** *$\mu\big(\bigcup_n B_n\big) \leq \sum_n \mu(B_n)$.*

iii) ***σ-Stetigkeit.*** *Gilt $B_n \uparrow B$, also*
$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \ , \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \ ,$$
so folgt $\lim_n \mu(B_n) = \mu(B)$. Gilt $\mu\{B_1\} < \infty$ und $B_n \downarrow B$, also
$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \ , \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \ ,$$
so folgt ebenfalls $\lim_n \mu(B_n) = \mu(B)$.

3 Das Integral im nicht-negativen Fall

Ausgehend von einem Maß μ auf dem meßbaren Raum $(S, \mathcal{B})$ definieren wir nun für messbare Funktionen f von S in die nicht–negativen Zahlen das Integral $\int f\, d\mu$. Sein Wert kann ∞ sein. Es ist günstig, ∞ auch als möglichen Wert für f zuzulassen, also für f den erweiterten Bildbereich $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ zu betrachten. Wir schreiben dann auch kurz $f \geq 0$. Das Integral wird mit Hilfe von **elementaren Funktionen** definiert, das sind messbare Funktionen h, die nur abzählbar viele verschiedene Werte annehmen. Es gilt also

$$h \;=\; \sum_z z \cdot 1_{\{h=z\}} \;,$$

dabei wird über die endlich oder abzählbar unendlich vielen Funktionswerte z von h summiert.

Definition. *Sei $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ meßbar. Dann wird das **Integral** von f nach dem Maß μ definiert als*

$$\int f\, d\mu \;:=\; \sup \Big\{ \sum_z z \cdot \mu(h = z) : \, h \geq 0 \textit{ ist elementar}, \; h \leq f \; f.s. \Big\} \;.$$

Dabei schreiben wir für $\mu(\{h = z\})$ kürzer $\mu(h = z)$. $h \leq f$ $f.s.$ bedeutet, daß die Komplementärmenge $\{h > f\}$ das Maß 0 hat. Für meßbares $B \subset S$ setzen wir

$$\int_B f\, d\mu \;:=\; \int 1_B f\, d\mu \;.$$

Im Fall eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und einer Zufallsvariablen $X \geq 0$ heißt das Integral auch Erwartungswert. Man schreibt

$$\int X\, d\mathbf{P} \;=\; \mathbf{E}[X] \;.$$

Wir betrachten nun den Fall elementarer Funktionen (in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie: den Fall diskreter Zufallsvariabler).

Proposition 3.1. *Für eine elemetare Funktion $f \geq 0$ gilt*

$$\int f\, d\mu \;=\; \sum_x x \cdot \mu(f = x) \;,$$

insbesondere $\int 0\, d\mu = 0$.

Beweis. Sei $h \geq 0$ elementar mit $h \leq f$ *f.s.* Aus $\mu(f = x, h = z) > 0$ folgt dann $z \leq x$, daher gilt

$$\begin{aligned}\sum_z z \cdot \mu(h = z) &= \sum_{z,x} z \cdot \mu(h = z, f = x) \\ &\leq \sum_{x,z} x \cdot \mu(f = x, h = z) = \sum_x x \cdot \mu(f = x) ,\end{aligned}$$

und das Supremum in der Definition des Integrals wird für $h = f$ angenommen. □

Folgende Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Integrals.

Proposition 3.2. *Für meßbare Funktionen $f, g \geq 0$ gilt:*

i) $f = g$ *f.s.* $\Rightarrow$ $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$,

ii) $f \leq g$ *f.s.* $\Rightarrow$ $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$,

iii) $\int f\,d\mu = 0$ $\Leftrightarrow$ $f = 0$ *f.s.*,

iv) $\int f\,d\mu < \infty$ $\Rightarrow$ $f < \infty$ *f.s.*

Beweis. *i)* und *ii)* sind offensichtlich. Zu *iii)*: Der Schluß $\Leftarrow$ folgt aus *i)* und Proposition 3.1. Für den Umkehrschluß wähle $z > 0$. Dann gilt $z\mu(f \geq z) \leq \int f\,d\mu$ wegen $h := z1_{\{f \geq z\}} \leq f$. Aus $\int f\,d\mu = 0$ folgt daher $\mu(f \geq z) = 0$ und mit $z \to 0$ die Behauptung $\mu(f > 0) = 0$. Zu *iv)*: Aus $h := z1_{\{f=\infty\}} \leq f$ folgt $z\mu(f = \infty) \leq \int f\,d\mu < \infty$. Mit $z \to \infty$ folgt $\mu(f = \infty) = 0$ und damit die Behauptung. □

Wir kommen nun zu dem grundlegenden **Satz von der monotonen Konvergenz** (auch **Satz von Beppo Levi** genannt).

Satz 3.3. *Gilt* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ *f.s. und* $f = \sup_n f_n$ *f.s., so folgt*

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu .$$

Beweis. Nach Proposition 3.2 *ii)* ist $\int f_n\,d\mu$ monoton wachsend und es gilt $\lim_n \int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu$.

Zum Nachweis der umgekehrten Ungleichung wähle $h \geq 0$ elementar mit $h \leq f$ *f.s.* und $\epsilon > 0$. Dann gilt für die elementaren Funktionen (mit $x^+ = \max(x, 0)$)

$$h_n := (h - \epsilon)^+ \cdot 1_{\{f_n > f - \epsilon\}}$$

$0 \leq h_n \leq f_n$ $f.s.$ Nach Definition des Integrals folgt für alle natürlichen Zahlen k

$$\sum_{i\leq k}(z_i-\epsilon)^+\mu(h=z_i, f_n > f-\epsilon) \;\leq\; \int f_n\,d\mu\ ,$$

dabei bezeichnen $z_1, z_2, \ldots$ die möglichen Werte von h. Für $n \to \infty$ gilt nun $\{h = z, \max_{m\leq n} f_m > \sup_m f_m - \epsilon\} \uparrow \{h = z\}$. Nach Annahme folgt $\mu(h = z, f_n > f - \epsilon) \to \mu(h = z)$ und

$$\sum_{i\leq k}(z_i-\epsilon)^+\mu(h=z_i) \;\leq\; \lim_n \int f_n\,d\mu$$

Mit $\epsilon \to 0$ und $k \to \infty$ folgt schließlich

$$\sum_z z\cdot\mu(h=z) \;\leq\; \lim_n \int f_n\,d\mu$$

und damit $\int f\,d\mu \leq \lim_n f_n\,d\mu$ nach Definition des Integrals. □

Eine nützliche Variante des Satzes ist das **Lemma von Fatou**.

Satz 3.4. *Gilt* $f = \liminf_n f_n$ *f.s. für* $f, f_1, f_2, \ldots \geq 0$*, so folgt*

$$\int f\,d\mu \;\leq\; \liminf_n \int f_n\,d\mu\ .$$

Beweis. Für $g_n := \inf_{m\geq n} f_m$ gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$, $\sup_n g_n = \liminf_n f_n = f$ $f.s.$ und $g_n \leq f_n$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu \;=\; \lim_n \int g_n\,d\mu \;\leq\; \liminf_n \int f_n\,d\mu\ .$$

□

Mittels monotoner Konvergenz beweisen wir nun die Additivität und positive Homogenität des Integral.

Satz 3.5. *Für messbare Funktionen* $f, g \geq 0$ *und reelle Zahlen* $\alpha, \beta \geq 0$ *gilt*

$$\int(\alpha f+\beta g)\,d\mu \;=\; \alpha\int f\,d\mu + \beta\int g\,d\mu.$$

Beweis. Für elementare Funktionen f, g folgt die Behauptung direkt aus Proposition 3.1,

$$\begin{aligned}\sum_z z\cdot\mu(\alpha f+\beta g=z) \;&=\; \sum_z z \sum_{\alpha x+\beta y=z}\mu(f=x, g=y)\\ &=\; \sum_{x,y}(\alpha x+\beta y)\cdot\mu(f=x,g=y)\\ &=\; \alpha\sum_x x\cdot\mu(f=x) + \beta\sum_y \cdot\mu(g=y)\ .\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall betrachten wir mit f und g auch die elementaren Funktionen

$$f_n := 2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{f > i/2^n\}} \tag{2}$$

und g_n analog. Für $i \geq 1$ gilt dann $\{i/2^n < f \leq (i+1)/2^n\} = \{f_n = i/2^n\}$ (und für $i = 0, \infty$ ähnliches), und es folgt $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ und $\sup_n f_n = f$. g_n erfüllt analoge Eigenschaften, daher ergibt sich die Behauptung aus

$$\int (\alpha f_n + \beta g_n)\, d\mu \;=\; \alpha \int f_n\, d\mu + \beta \int g_n\, d\mu.$$

durch Grenzübergang nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. □

Bemerkung. Für die in (2) definierten meßbaren Funktionen f_n gilt

$$\int f_n\, d\mu \;=\; 2^{-n} \sum_{i \geq 1} \mu(f > i/2^n) \ .$$

Die linke Seite konvergiert gegen $\int f\, d\mu$. Indem wir die rechte Seite als Riemann–Approximation eines Integrals auffassen, erhalten wir durch Grenzübergang die für beliebige meßbare Funktionen $f \geq 0$ gültige Formel

$$\int f\, d\mu \;=\; \int_0^{\infty} \mu(f > x)\, dx \ .$$

□

Kombination von Additivität und monotoner Konvergenz ergibt die folgende Version des Satzes von der monotonen Konvergenz.

Satz 3.6. *Für meßbare Funktionen* $f_n \geq 0$ *gilt*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu \ .$$

Wir schließen den Abschnitt mit zwei weiteren Anwendungen des Satzes von der monotonen Konvergenz ab. Die Beweise werden nach demselben Prinzip mit Hilfe folgender Proposition geführt.

Proposition 3.7. *Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von meßbaren Funktionen $f \geq 0$ mit den Eigenschaften*

i) $f, g \in \mathcal{K}, \alpha, \beta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g \in \mathcal{K}$,

ii) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \sup_n f_n \in \mathcal{K}$,

iii) $1_B \in \mathcal{K}$ *für alle* $B \in \mathcal{B}$.

Dann enthält $\mathcal{K}$ alle meßbaren Funktionen $f \geq 0$.

Beweis. Sei $f \geq 0$ meßbar. Definiere f_n wie in (2). Nach *i) – iii)* folgt $f_n \in \mathcal{K}$. Wegen $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ und $f = \sup_n f_n$ folgt nach *ii)* $f \in \mathcal{K}$. □

Die Transformationsformel

Wir formulieren die Transformationsformel im besonders wichtigen Fall von Zufallsvariablen. Sei $\mathbf{P}$ Maß auf $\mathcal{A}$, X S-wertige Zufallsvariable und $\mu = \mu_X$ die Verteilung von X unter $\mathbf{P}$, also

$$\mu_X(B) \ := \ \mathbf{P}\{X \in B\}$$

für alle meßbaren $B \subset S$. Dann gilt für nicht–negatives meßbares $f : S \to \mathbb{R}$ die **Transformationsformel**

$$\int f(X) \, d\mathbf{P} \ = \ \int f \, d\mu_X .$$

Für Zufallsvariable $X \geq 0$ folgt speziell

$$\int X \, d\mathbf{P} = \int x \, d\mu_X \ .$$

Zum Beweis betrachten wir $\mathcal{K} := \{f \geq 0 : \int f \, d\mu = \int f(X) \, d\mathbf{P}\}$. $\mathcal{K}$ erfüllt die Bedingungen *i) – iii)* von Proposition 3.7, wegen der Sätze 3.5 und 3.3 und nach Definition von μ. Daher enthält $\mathcal{K}$ alle $f \geq 0$, und die Behauptung folgt.

Maße mit Dichten

Sei ν ein Maß auf $\mathcal{B}$ und sei $h \geq 0$ meßbar. Wir setzen

$$\mu(B) \;:=\; \int_B h\, d\nu\;, \quad B \in \mathcal{B}\;.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}$. Man schreibt kurz

$$d\mu \;=\; h\, d\nu \quad \text{oder} \quad h \;=\; \frac{d\mu}{d\nu}$$

und nennt h die **Dichte** von μ bzgl. ν. Ist μ ein endliches Maß, so ist die Dichte fast sicher eindeutig bestimmt. Ist nämlich h' eine weitere Dichte von μ bzgl. ν, so gilt

$$\begin{aligned}\int |h - h'|\, d\nu \;&=\; \int_{\{h>h'\}} (h-h')\, d\nu + \int_{\{h\leq h'\}} (h'-h)\, d\nu \\ &=\; \mu(h>h') - \mu(h>h') + \mu(h \leq h') - \mu(h \leq h') \;=\; 0\;,\end{aligned}$$

also nach Proposition 3.2 *iii)* $h = h'$ *f.s.* (Im σ-endlichen Fall läßt sich ähnlich argumentieren.) Für meßbares $f \geq 0$ gilt

$$\int f\, d\mu \;=\; \int fh\, d\nu\;.$$

Zum Beweis setzen wir $\mathcal{K} := \{f \geq 0 : \int f\, d\mu = \int fh\, d\nu\}$. Wiederum sind die Voraussetzungen von Proposition 3.7 erfüllt, und die Behauptung folgt.

4 Integrierbarkeit

Die Integration von meßbaren Funktionen f von S in die reellen Zahlen führt man auf die Integration von nicht–negativen meßbaren Funktionen zurück. Dazu zerlegen wir f in Positiv- und Negativteil:

$$f \;=\; f^+ - f^- \;, \qquad \text{mit } f^+ \;:=\; \max(f,0)\;,\; f^- \;:=\; \max(-f,0)\;.$$

Anders als im letzten Abschnitt betrachten wir jetzt nur Integrale mit endlichem Wert.

Definition. *Eine meßbare Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt bzgl. des Maßes μ* ***integrierbar****, falls $\int f^+\,d\mu < \infty$ und $\int f^-\,d\mu < \infty$. Das* ***Integral*** *von f ist dann definiert als*

$$\int f\,d\mu \;:=\; \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\;.$$

Wegen $|f| = f^+ + f^-$ gilt nach Satz 3.5 $\int |f|\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu$. f ist daher genau dann integrierbar, wenn

$$\int |f|\,d\mu \;<\; \infty\;,$$

und es folgt

$$\Big|\int f\,d\mu\Big| \;\le\; \int |f|\,d\mu\;.$$

Die weiteren Eigenschaften des Integrals leiten sich aus den Resultaten des letzten Abschnittes ab.

Satz 4.1. *Sind f,g integrierbar und $f \le g$ f.s., so gilt $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$.*

Beweis. $f \le g$ f.s. impliziert $f^+ + g^- \le f^- + g^+$ f.s. Nach Proposition 3.2 und Satz 3.5 folgt $\int f^+\,d\mu + \int g^-\,d\mu \le \int f^-\,d\mu + \int g^+\,d\mu$. Die Behauptung folgt durch Umstellen der Terme. □

Satz 4.2. *Sind f,g integrierbar und α,β reelle Zahlen, so ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar, und es gilt*

$$\int (\alpha f + \beta g)\,d\mu \;=\; \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu.$$

Beweis. Proposition 3.2 und Satz 3.5 ergeben die Abschätzung $\int |f+g|\,d\mu \leq \int(|f|+|g|)\,d\mu = \int |f|\,d\mu + \int |g|\,d\mu < \infty$, also ist $f+g$ integrierbar. Aus $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ folgt $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Durch Integration dieser Gleichung nach Satz 3.2 und Umstellen der Terme erhält man $\int(f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$. Die Gleichung $\int(\alpha f)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$ folgt ähnlich. □

Als Anwendung dieser Sätze beweisen wir nun zwei wichtige auf Konvexität beruhenden Ungleichungen. Seien f, g meßbare Funktionen und $p, q > 1$ konjugierte reelle Zahlen, d.h. $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt die **Höldersche Ungleichung**

$$\int |fg|\,d\mu \;\leq\; \Big(\int |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int |g|^q\,d\mu\Big)^{1/q}.$$

Im Fall $p = q = 2$ ist dies die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

Beweis. Da der Logarithmus eine konkave Funktion ist, gilt für Zahlen $a, b \geq 0$

$$\log ab \;=\; \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q \;\leq\; \log\Big(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\Big),$$

also für $\alpha, \beta > 0$

$$\frac{|f|}{\alpha}\cdot\frac{|g|}{\beta} \;\leq\; \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\beta^q}.$$

Wählen wir $\alpha^p = \int |f|^p\,d\mu$ und $\beta^q = \int |g|^q\,d\mu$, so folgt durch Integration

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int |fg|\,d\mu \;\leq\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1,$$

und dies ist die Behauptung. Die Fälle α oder β gleich 0 oder ∞ sind gesondert zu behandeln (Übung). □

Die andere Ungleichung setzt voraus, daß ein W-Maß $\mathbf{P}$ zugrunde liegt, deswegen benutzen wir nun die Notation eines Integrals als Erwartungswert. Sei X eine integrierbare Zufallsvariable und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt die **Jensensche Ungleichung**

$$\phi(\mathbf{E}[X]) \;\leq\; \mathbf{E}[\phi(X)].$$

Beweis. Da ϕ konvex ist, gibt es für jedes reelle α ein β, so daß $\phi(x) \geq \phi(\alpha) + \beta(x-\alpha)$ für alle x. Bei der Wahl $\alpha = \mathbf{E}[X]$ folgt die Behauptung:

$$\mathbf{E}[\phi(X)] \geq \phi(\alpha)\mathbf{P}(\Omega) + \beta\big(\mathbf{E}[X] - \alpha\mathbf{P}(\Omega)\big) = \phi\big(\mathbf{E}[X]\big).$$

□

Spezialfälle sind

$$\begin{aligned} \big|\mathbf{E}[X]\big| &\le \mathbf{E}[|X|], \\ \mathbf{E}[X]^2 &\le \mathbf{E}[X^2], \\ \mathbf{E}[|X|^p]^{1/p} &\le \mathbf{E}[|X|^q]^{1/q} \qquad \text{für } 0 < p \le q, \\ \exp\big(\mathbf{E}[X]\big) &\le \mathbf{E}[\exp(X)]. \end{aligned}$$

Wir beenden den Abschnitt mit einer weiteren Version des Satzes von der monotonen Konvergenz, dem **Satz von der dominierten Konvergenz** (oder **Lebesguescher Konvergenzsatz**).

Satz 4.3. *Sei $f_1, f_2, \dots$ eine Folge meßbarer Funktionen, die f.s. gegen die meßbare Funktion f konvergiert. Gilt dann für eine meßbare Funktion $g \ge 0$ mit $\int g\, d\mu < \infty$*

$$|f_n| \le g \quad f.s.$$

für alle n, so sind f_n und f integrierbar, und für $n \to \infty$ folgt

$$\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu \ .$$

Beweis. Aus $|f_n| \le g$ $f.s.$ folgt nach Annahme $|f| \le g$ $f.s.$ Es folgt $\int |f_n|\, d\mu < \infty$ und $\int |f|\, d\mu < \infty$, daher sind f_n und f integrierbar. Das Lemma von Fatou, angewandt auf $2g - |f_n - f| \ge 0$ $f.s.$ ergibt

$$\begin{aligned} \int 2g\, d\mu &\le \liminf_n \int (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\ &= \int 2g\, d\mu - \limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu \ . \end{aligned}$$

Da nach Annahme $\int 2g\, d\mu$ endlich ist, folgt $\limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu \le 0$. Wegen $|\int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu| \le \int |f_n - f|\, d\mu$ ergibt sich die Behauptung. □

5 Der Eindeutigkeitssatz für Maße

In diesem Abschnitt betrachten wir endliche Maße.

Satz 5.1. *Sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$–stabiler Erzeuger der σ–Algebra $\mathcal{B}$ auf S, d.h.*

$$B, B' \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad B \cap B' \in \mathcal{E} \ .$$

Sind dann μ und ν endliche Maße auf $\mathcal{B}$ mit

$$\mu(B) \ = \ \nu(B) \quad \textit{für alle } B \in \mathcal{E} \cup \{S\} \ ,$$

so gilt $\mu = \nu$.

Beweis. Wir betrachten das System

$$\mathcal{G} \ := \ \{B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \nu(B)\}$$

aller Ereignisse mit gleichem Maß. Nach Annahme und nach den Eigenschaften von endlichen Maßen hat es die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&S \ \in \ \mathcal{G} \ , \\
&B, B' \in \mathcal{G}, B \supset B' \quad \Rightarrow \quad B - B' \in \mathcal{G} \ , \\
&B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{G} \text{ paarweise disjunkt} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_n B_n \in \mathcal{G} \ .
\end{aligned}$$

Ein System mit diesen drei Eigenschaften heißt *Dynkin–System*. Sei weiter $\mathcal{D}$ das kleinste Dynkin–System, das den Erzeuger $\mathcal{E}$ umfaßt, also $\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{G}$.

Offenbar langt es zu zeigen, daß $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ gilt. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{D}$ $\cap$–stabil ist. Dazu betrachten wir für alle $D \in \mathcal{D}$ das System

$$\mathcal{D}_D \ := \ \{B \in \mathcal{D} : B \cap D \in \mathcal{D}\} \ .$$

Eine kurze Rechnung ergibt, daß sich die Eigenschaften von $\mathcal{D}$ auf diese Systeme übertragen, daß es sich also ebenfalls um Dynkin–Systeme handelt. Sei nun $E \in \mathcal{E}$. Dann folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, denn $\mathcal{E}$ ist nach Annahme $\cap$–stabil. Aus der Minimalität von $\mathcal{D}$ folgt $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}$, mit anderen Worten: $D \cap E \in \mathcal{D}$ für alle $D \in \mathcal{D}$, $E \in \mathcal{E}$. Dies besagt, daß $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$ für alle $D \in \mathcal{D}$ gilt. Erneut ergibt die Minimalität von $\mathcal{D}$ die Gleichung $\mathcal{D}_D = \mathcal{D}$, nun für alle $D \in \mathcal{D}$. Definitionsgemäß bedeutet diese Gleichung die behauptete $\cap$–Stabilität von $\mathcal{D}$.

Nun ist leicht zu erkennen, daß $\mathcal{D}$ eine σ–Algebra ist. Ein Dynkin-System enthält immer die Grundmenge S und Komplementärereignisse $B^c = S - B$. Außerdem läßt sich im $\cap$–stabilen Fall wegen

$$\bigcup_n B_n \ = \ \bigcup_n B_n \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c$$

jede abzählbare Vereinigung auf eine disjunkte Vereinigung zurückführen.

Da $\mathcal{E}$ die σ–Algebra $\mathcal{B}$ erzeugt, folgt $\mathcal{B} = \mathcal{D} = \mathcal{G}$. Dies ergibt die Behauptung. □

Beispiel. Borel–σ–Algebren. Die Borel–σ–Algebra $\mathcal{B}$ auf einem Euklidischen Raum oder allgemeiner auf einem metrischen Raum S mit Metrik d ist die von den offenen Mengen erzeugte σ–Algebra. Da S selbst offen ist und die offenen Mengen ein $\cap$–stabiles System bilden, ist ein endliches Maß μ auf $\mathcal{B}$ nach obigem Satz durch die Werte $\mu(O)$ für offenes $O \subset S$ bestimmt. Wir folgern, daß μ auch durch die Integral

$$\int \phi \, d\mu \ , \quad \text{für alle stetigen, beschränkten } \phi : S \to \mathbb{R}$$

festgelegt ist. Dazu betrachten wir für offenes $O \subset S$ und natürliche Zahlen n die stetigen, beschränkten Funktionen

$$\phi_n(x) \ := \ \min(1, nd(x, O^c)) \ , \quad x \in S \ ,$$

wobei $d(x,B) := \inf\{d(x,y) : y \in B\}$ den Abstand zwischen $x \in S$ und $B \subset S$ bezeichne. Da O offen ist, konvergiert ϕ_n punktweise gegen 1_O (die charakteristische Funktion von O). Außerdem ist ϕ_n monoton wachsend und nicht-negativ, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt daher

$$\int \phi_n \, d\mu \ \to \ \mu(O) \ .$$

Damit ist mit $\int \phi \, d\mu$ für alle stetigen, beschränkten ϕ auch $\mu(O)$ für alle offenen $O \subset S$ festgelegt, und es folgt die Behauptung. □

Beispiel. Endlichdimensionale Verteilungen. Die gemeinsame Verteilung einer unendlichen Folge $X = (X_1, X_2, \dots)$ von reellwertigen Zufallsvariablen ist das W-Maß μ_X auf $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$, das sich aus dem zugrundeliegenden W-Maß μ gemäß

$$\mu_X(B) \ := \ \mu\{X \in B\} \ , \quad B \in \mathcal{B}^\infty$$

bestimmt. $\mathcal{B}^\infty$ wird von $\mathcal{E} := \{B_n \times \mathbb{R}^\infty : B_n \text{ ist Borel–Menge in } \mathbb{R}^n\}$ erzeugt. Dies ist ein $\cap$–stabiler Erzeuger. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist daher $\mu_{X_1, X_2, \dots}$ durch die endlichdimensionalen Verteilungen $\mu_{X:1,\dots,X_n}$,

$$\mu_{X:1,\dots,X_n}(B_n) \ := \ \mu\{(X_1, \dots, X_n) \in B_n\} \ , \quad B_n \in \mathcal{B}^n$$

für $n = 1, 2, \dots$ festgelegt.

Auch $\mathcal{E}' := \{\mathbb{R}^{n-1} \times B \times \mathbb{R}^\infty : n \geq 1, B \in \mathcal{B}^1\}$ erzeugt $\mathcal{B}^\infty$, jedoch ist dieser Erzeuger nicht $\cap$–stabil. Demgemäß legen die eindimensionalen Verteilungen μ_{X_n} (die Verteilungen der X_n) im Allgemeinen μ_X nicht eindeutig fest. □

6 Doppelintegrale, Unabhängigkeit

Beim Bilden von mehrfachen Integralen ist es hilfreich, die Schreibweise geeignet anzupassen. Man muß die verschiedenen Integrationsvariablen auseinanderhalten, außerdem werden die Formeln übersichtlicher, wenn man in der Notation von Integralen die zu integrierenden Funktionen nach hinten stellt. Wir schreiben also für $\int f\,d\mu$ auch $\int \mu(dx)\, f(x)$.

Definition. *Seien $(S_1, \mathcal{B}_1), (S_2, \mathcal{B}_2)$ meßbare Räume. Eine Familie $\kappa = (\kappa_x)_{x \in S_1}$ von Maßen auf $(S_2, \mathcal{B}_2)$ heißt* **Kern** *von $(S_1, \mathcal{B}_1)$ nach $(S_2, \mathcal{B}_2)$, falls für alle $B_2 \in \mathcal{B}_2$ die Abbildung $x \mapsto \kappa_x(B_2)$ von S_1 nach $\mathbb{R}_+$ meßbar ist. κ heißt* ***endlicher Kern****, falls $\sup_x \kappa_x(S_2) < \infty$.*

Satz 6.1. *Sei κ ein endlicher Kern von $(S_1, \mathcal{B}_1)$ nach $(S_2, \mathcal{B}_2)$, und sei μ ein endliches Maß auf $(S_1, \mathcal{B}_1)$. Dann ist für alle $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ der Ausdruck*

$$\nu(B) \;:=\; \int \mu(dx) \int \kappa_x(dy)\, 1_B(x,y)$$

wohldefiniert. ν ist ein Maß, und für $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ nicht-negativ und meßbar gilt (mit wohldefiniertem Doppelintegral)

$$\int f\,d\nu \;=\; \int \mu(dx) \int \kappa_x(dy)\, f(x,y)\ . \tag{3}$$

Beweis. Wir greifen auf Begriffe und Überlegungen des Beweises des Eindeutigkeitssatzes für Maße zurück. Das System $\mathcal{G}$ aller $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ mit den Eigenschaften

i) für alle $x \in S_1$ ist die Abbildung $y \mapsto 1_B(x,y)$ $\mathcal{B}_2$-meßbar,
ii) die Abbildung $x \mapsto \int \kappa_x(dy)\, 1_B(x,y)$ ist $\mathcal{B}_1$-meßbar,

ist nach den Eigenschaften von endlichen Kernen, Integralen und meßbaren Funktionen ein Dynkin–System, das $\mathcal{E} = \{B_1 \times B_2 : B_i \in \mathcal{B}_i, i = 1,2\}$ umfasst. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiler Erzeuger der Produkt-σ-Algebra ist und $S_1 \times S_2$ enthält, folgt wie beim Eindeutigkeitssatz für Maße $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, daher ist $\nu(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ wohldefiniert. Nach dem Satz 3.6 ist ν ein Maß.

Zum Nachweis der letzten Behauptung betrachten wir die Menge $\mathcal{K}$ aller $f \geq 0$ mit

i) für alle $x \in S_1$ ist die Abbildung $y \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{B}_2$-meßbar,
ii) die Abbildung $x \mapsto \int \kappa_x(dy)\, f(x,y)$ ist $\mathcal{B}_1$-meßbar,
iii) $\int f\,d\nu = \int \mu(dx) \int \kappa_x(dy)\, f(x,y)$.

Nach den Eigenschaften von Integralen erfüllt $\mathcal{K}$ die Bedingungen *i), ii)* aus Proposition 3.7, und nach Definition von ν auch die Bedingung *iii)*. Daher enthält $\mathcal{K}$ alle $f \geq 0$, und der Beweis ist abgeschlossen. □

Formel (3) bleibt auch für alle $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ gültig, die integrierbar bzgl. ν sind. Der Beweis wird wie üblich geführt, indem man f in f^+ und f^- zerlegt. Dabei ist das Folgende zu beachten: Im Allgemeinen ist es möglich (wenn auch im konkreten Fall nur die Ausnahme), daß $\int \kappa_x(dy)\,|f|(x,y)$ für einzelne x den Wert ∞ annimmt und $\int \kappa_x(dy)\, f(x,y)$ nicht definiert ist. Für die Integration nach $\mu(dx)$ haben wir solche Fälle bisher nicht in Betracht gezogen. Dies bereitet jedoch keine besonderen Probleme. Wegen

$$\int \mu(dx) \int \kappa_x(dy)\,|f|(x,y) \;=\; \int |f|\, d\nu \;<\; \infty$$

und Proposition 3.2 *iv)* ist $\{x : \int \kappa_x(dy)\,|f|(x,y) = \infty\}$ eine μ–Nullmenge. Indem wir $f(x,y)$ in diesem Bereich für die Doppelintegration geeignet abändern (etwa Null setzen), umgehen wir das Problem, ohne das sich sonst etwas wesentliches ändert.

Wir benutzen nun den letzten Satz, um Produktmaße einzuführen. Seien μ_1 und μ_2 endliche Maße auf $(S_1, \mathcal{B}_1)$ und $(S_2, \mathcal{B}_2)$. Dann ist

$$\kappa_x \;:=\; \mu_2 \;, \quad x \in S_1$$

trivialerweise ein Kern, den wir nach dem letzten Satz zusammen mit μ_1 zu einem Maß ν zusammensetzen können. Für $B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2$ folgt

$$\begin{aligned}\nu(B_1 \times B_2) \;&=\; \int \mu_1(dx) \int \mu_2(dy)\, 1_{B_1 \times B_2}(x,y) \\ &=\; \int \mu_1(dx) \int \mu_2(dy)\, 1_{B_1}(x) 1_{B_2}(y) \;=\; \int 1_{B_1}\, d\mu_1 \cdot \int 1_{B_2}\, d\mu_2 \;,\end{aligned}$$

also die Produktformel

$$\nu(B_1 \times B_2) \;=\; \mu_1(B_1)\mu_2(B_2) \;.$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße ist ν durch diese Produktformel eindeutig festgelegt, denn die meßbaren Quader $B_1 \times B_2$ bilden einen $\cap$–stabilen Erzeuger der Produkt–σ–Algebra. ν heißt das **Produktmaß** von μ_1 und μ_2, man schreibt

$$\nu \;=\; \mu_1 \otimes \mu_2 \;.$$

Man gelangt zu derselben Produktformel und damit zu demselben Maß ν, wenn man in der Konstruktion die Rollen von μ_1 und μ_2 vertauscht, also μ_1 als Kern von $(S_2, \mathcal{B}_2)$ nach $(S_1, \mathcal{B}_1)$ auffaßt und dann nach μ_2 integriert. Nach

Satz 6.1 folgt für meßbares $f \geq 0$ bzw. für $(\mu_1 \otimes \mu_2)$–integrierbares f

$$\begin{aligned}\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \mu_1(dx) \int \mu_2(dy) \, f(x,y) \\ &= \int \mu_2(dy) \int \mu_1(dx) \, f(x,y) \; .\end{aligned}$$

Dies ist der **Satz von Fubini**. Speziell erhält man für $f(x,y) = g(x)h(y)$

$$\int g(x)h(y) \, (\mu_1 \otimes \mu_2)(dx,dy) \;=\; \int g(x) \, \mu_1(dx) \int h(y) \, \mu_2(dy) \; .$$

Das Produktmaß von mehreren endlichen Maßen

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

kann man schrittweise mittels $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n := \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ definieren. Weiter bereitet es keine Schwierigkeiten, Produktmaße auch für σ–endliche Maße durch Rückführung auf den Fall endlicher Maße einzuführen.

Unabhängigkeit

Der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen läßt sich sinnvoll nur in W-Räumen definieren, wir betrachten nun also ein W-Maß $\mathbf{P}$ auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition. *Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen **(stochastisch) unabhängig**, falls für beliebige meßbare $B_1, \ldots, B_n$ aus den zugehörigen Wertebereichen die Produktformel*

$$\mathbf{P}\{X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\} \;=\; \mathbf{P}\{X_1 \in B_1\} \cdots \mathbf{P}\{X_n \in B_n\} \; .$$

gilt. Eine unendliche Folge $X_1, X_2, \ldots$ heißt unabhängig, wenn dies für jedes endliche Teilstück $X_1, \ldots, X_n$ gilt.

Man bemerke, daß Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ auch die Unabhängigkeit von $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ für $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ nach sich zieht (man setze in der Produktformel $B_j = S_j$ für $j \neq i_1, \ldots, i_k$). Unabhängigkeit für eine unendliche Folge von Zufallsvariablen ist gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit jeder endlichen Teilfolge.

Wir drücken nun Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ mit Verteilungen aus. Offenbar ist die Produktformel für Unabhängigkeit äquivalent zu

$$\mathbf{P}\{(X_1, \ldots, X_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n\} \;=\; \mathbf{P}\{X_1 \in B_1\} \cdots \mathbf{P}\{X_n \in B_n\} \; .$$

In den Verteilungen und der gemeinsamen Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ läßt sich dies ausdrücken als

$$\mu_{X_1,\ldots,X_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) \;=\; \mu_{X_1}(B_1) \cdots \mu_{X_n}(B_n) \;.$$

Der rechte Teil läßt sich mit dem Produktmaß ausdrücken. Wir stellen also fest, daß eine Folge von Zufallsvariablen genau dann unabhängig sind, wenn das Produkt ihrer Verteilungen gerade die gemeinsame Verteilung ergibt,

$$\mu_{X_1,\ldots,X_n} \;=\; \mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n} \;. \tag{4}$$

Allgemeiner gilt im Fall, daß Verteilungen durch Dichten gegeben sind, die folgende Aussage.

Proposition 6.2. *Für $i = 1, \ldots, n$ seien X_i Zufallsvariablen mit Werten in S_i, ν_i endliche (oder allgemeiner σ–endliche) Maße auf S_i und $h_i : S_i \to \mathbb{R}$ nicht-negative, meßbare Funktionen. Setze $h : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ als*

$$h(x_1, \ldots, x_n) \;:=\; h_1(x_1) \cdots h_n(x_n) \;.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängige Zufallsvariable mit Verteilungen, gegeben durch

$$d\mu_{X_i} = h_i \, d\nu_i$$

für $i = 1, \ldots, n$.

ii) Für die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$d\mu_{X_1,\ldots,X_n} \;=\; h \, d(\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n) \;.$$

Beweis. Nach dem Satz von Fubini gilt für meßbare $B_i \subset S_i$

$$\int\limits_{B_1 \times \cdots \times B_n} h \, d(\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n) \;=\; \int\limits_{B_1} h_1 \, d\nu_1 \cdots \int\limits_{B_n} h_n \, d\nu_n \;,$$

bzw. nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße

$$\mu \;=\; \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

für die Maße $d\mu = h \, d(\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n)$ und $\mu_i = h_i \, d\nu_i$. Die Behauptung folgt daher aus (4), wobei man beachte, daß nicht nur die μ_i das Produktmaß μ bestimmen, sondern umgekehrt auch μ die μ_i festlegt. $\square$

Sind $X_1, \dots, X_n$ integrierbare reellwertige Zufallsvariablen, so folgt nach dem Satz von Fubini

$$\int x_1 \cdots x_n \; \mu(dx_1, \dots, dx_n) \; = \; \int x_1 \; \mu_1(dx_1) \cdots \int x_n \; \mu(dx_n),$$

und man erhält die Produktformel

$$\mathbf{E}[X_1 \cdots X_n] \; = \; \mathbf{E}[X_1] \cdots \mathbf{E}[X_n] \; .$$

Beispiel. Ein Modell für eine unendliche Serie von Münzwürfen. Sei $\mathcal{A}$ die Borel-σ-Algebra und sei $\mathbf{P}$ das Lebesgue-Maß auf dem Intervall $[0,1)$. X_n bezeichne die Indikatorvariable von

$$A_n \; := \; \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \Big[\frac{2i-1}{2^n}, \frac{2i}{2^n} \Big)$$

(X_n kann man als die $n$te Stelle nach dem Komma in der Dualbruchdarstellung einer zufällig aus $[0,1)$ gezogenen Zahl begreifen). Diese Zufallsvariablen sind unabhängig. Es gilt nämlich für Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$

$$\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n = x_n\} \; = \; [x, x + 2^{-n})$$

mit $x = \sum_{i=1}^n x_i 2^{-i}$, und folglich

$$\mathbf{P}\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \; = \; 2^{-n} \; = \; \mathbf{P}\{X_1 = x_1\} \cdots \mathbf{P}\{X_n = x_n\} \; .$$

Durch Summation dieser Gleichungen über $x_i = 0, 1$ entstehen alle für die Unabhängigkeit geforderten Gleichungen. Insbesondere gilt

$$\mathbf{P}\{X_n = 1\} \; = \; \mathbf{P}\{X_n = 0\} \; = \; 1/2 \; .$$

$\square$

7 Konstruktion von Maßen

Wir konstruieren Maße nach der Methode von *Caratheodory*. Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen von S mit $\emptyset \in \mathcal{E}$. Eine Abbildung $\pi : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt **Prämaß**, falls

i) $\pi(\emptyset) = 0$,

ii) Für $O, V \in \mathcal{E}$ und für $\epsilon > 0$ gibt es $O', O'' \in \mathcal{E}$ so daß $O \cap V \subset O'$, $O \cap V^c \subset O''$ und $\pi(O') + \pi(O'') \leq \pi(O) + \epsilon$.

iii) Gilt für $O \in \mathcal{E}$ und eine endliche oder unendliche Folge $O_1, O_2, \ldots \in \mathcal{E}$ die Inklusion $O \subset \bigcup_n O_n$ so folgt $\pi(O) \leq \sum_n \pi(O_n)$.

Satz 7.1. *Jedes Prämaß π auf $\mathcal{E}$ läßt sich zu einem Maß μ auf der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ–Algebra $\mathcal{B}$ fortsetzen, gegeben durch*

$$\mu(B) \;=\; \inf\Big\{ \sum_n \pi(O_n) : O_1, O_2, \ldots \in \mathcal{E}, B \subset \bigcup_n O_n \Big\}$$

für alle $B \subset \mathcal{B}$.

Beweis. Im *1. Schritt* erweitern wir π. Für beliebiges $B \subset S$ setzen wir

$$\mu^*(B) \;:=\; \inf\Big\{ \sum_n \pi(O_n) : O_1, O_2, \ldots \in \mathcal{E}, B \subset \bigcup_n O_n \Big\} .$$

Dabei bezeichne $O_1, O_2, \ldots$ eine endliche oder unendliche Folge in $\mathcal{E}$. μ^* ist ein *äußeres Maß*, d.h. es erfüllt folgende Eigenschaften:

Positivität: $\mu^* \geq 0$ und $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Monotonie: $B \subset B' \quad \Rightarrow \quad \mu^*(B) \leq \mu^*(B')$.

Subadditivität: $\mu^*(\bigcup_n B_n) \leq \sum_n \mu^*(B_n)$ für beliebige endliche oder unendliche Folgen $B_1, B_2, \ldots$

Die beiden ersten Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition. (Monotonie ist übrigens auch Konsequenz der Subadditivität.)Die Zum Beweis der Subadditivität wählen wir zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ Teilmengen $O_{n,m} \in \mathcal{E}$, so daß $B_n \subset \bigcup_m O_{n,m}$ und

$$\sum_m \pi(O_{n,m}) \;\leq\; \mu^*(B_n) + \epsilon 2^{-n} .$$

Es folgt $\bigcup_n B_n \subset \bigcup_{n,m} O_{n,m}$ und damit

$$\mu^*\Big(\bigcup_n B_n\Big) \;\le\; \sum_{n,m} \pi(O_{n,m}) \;\le\; \sum_n \mu^*(B_n) + \epsilon\ .$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt die Subadditivität.

Im *2. Schritt* zeigen wir, daß jedes äußere Maß μ^*, geeignet eingeschränkt, ein Maß auf einer σ–Algebra ergibt. Man nennt $B \subset S$ eine *μ^*–meßbare* Teilmenge von S, falls die Schnitteigenschaft

$$\mu^*(B') \;=\; \mu^*(B' \cap B) + \mu^*(B' \cap B^c) \quad \text{für alle } B' \subset S$$

gilt. Wir zeigen, daß das System $\mathcal{B}^*$ aller μ^*–meßbaren Teilmengen von S eine σ–Algebra und die Einschränkung von $\mu^*(B)$ auf $\mathcal{B}^*$ ein Maß ist. Unmittelbar aus der Definition ersichtlich sind die Eigenschaften

$$S \in \mathcal{B}^* \quad \text{und} \quad B \in \mathcal{B}^* \;\Rightarrow\; B^c \in \mathcal{B}^*\ .$$

Seien nun $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^*$. Mehrfache Anwendung der Eigenschaft μ^*–meßbarer Teilmengen ergibt

$$\begin{aligned} \mu^*(B') &= \mu^*(B' \cap B_1) + \mu^*(B' \cap B_1^c) & (*)\\ &= \mu^*(B' \cap B_1) + \mu^*(B' \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(B' \cap B_1^c \cap B_2^c) \\ &= \mu^*(B' \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^*(B' \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\ &\quad + \mu^*(B' \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\ &= \mu^*(B' \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(B' \cap (B_1 \cup B_2)^c)\ . & (**) \end{aligned}$$

Es folgt $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}^*$ und $B_1 \cap B_2 = (B_1^c \cup B_2^c)^c \in \mathcal{B}^*$. Sind B_1 und B_2 disjunkt, so folgt aus den Zeilen (*) und (**) bei der Wahl $B' = B_1 \cup B_2$

$$\mu^*(B_1) + \mu^*(B_2) \;=\; \mu^*(B_1 \cup B_2)\ .$$

Seien weiter $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}^*$ paarweise disjunkt. Nach der soeben gezeigten Additivität und der Monotonie von μ^* folgt für alle natürlich Zahlen k

$$\begin{aligned} \mu^*(B') &= \mu^*\Big(B' \cap \bigcup_{n=1}^k B_n\Big) + \mu^*\Big(B' \cap \Big(\bigcup_{n=1}^k B_n\Big)^c\Big) \\ &\ge \sum_{n=1}^k \mu^*(B' \cap B_n) + \mu^*\Big(B' \cap \Big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\Big)^c\Big) \end{aligned}$$

Mittels $k \to \infty$ und Subadditivität folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(B') &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B' \cap B_n) + \mu^*\Big(B' \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big)^c\Big) & (\text{'}) \\ &\geq \mu^*\Big(B' \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) + \mu^*\Big(B' \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big)^c\Big) \\ &\geq \mu^*(B') \ . & (\text{''}) \end{aligned}$$

Es gelten also überall Gleichheitszeiten und es folgt $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}^*$. Wählen wir insbesondere $B' = \bigcup_n B_n$, so folgt aus den Zeilen (') und (")

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) \ = \ \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \ ,$$

d.h. μ^* ist σ–additiv auf $\mathcal{B}^*$. Schließlich lassen sich beliebige abzählbare Vereinigungen gemäß

$$\bigcup_n B_n \ = \ \bigcup_n B_n \cap B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c$$

auf disjunkte Vereinigungen zurückführen, so daß $\mathcal{B}^*$ eine σ–Algebra ist.

Im *3. Schritt* stellen wir abschließend den Zusammenhang zum Prämaß π her. Wir zeigen, daß jedes $O \in \mathcal{E}$ μ^*–meßbar ist. Für $B' \subset S$ und $\epsilon > 0$ wählen wir dazu $O_1, O_2, \ldots \in \mathcal{E}$, so daß $B' \subset \bigcup O_n$ und $\sum_n \pi(O_n) \leq \mu^*(B') + \epsilon$. Weiter wählen wir nach den Eigenschaften des Prämaß π Elemente $O_1', O_2', \ldots$ und $O_1'', O_2'', \ldots$ von $\mathcal{E}$, so daß $O_n \cap O \subset O_n'$, $O_n \cap O^c \subset O_n''$ und $\pi(O_n') + \pi(O_n'') \leq \pi(O_n) + \epsilon 2^{-n}$. Es folgt unter Beachtung der Definition und der Subadditivität von μ^* und wegen $B' \cap O \subset \bigcup_n O_n'$, $B' \cap O^c \subset \bigcup_n O_n''$

$$\begin{aligned} \mu^*(B') &\leq \mu^*(B' \cap O) + \mu^*(B' \cap O^c) \ \leq \ \sum_n \pi(O_n') + \sum_n \pi(O_n'') \\ &\leq \sum_n \pi(O_n) + \epsilon \ \leq \ \mu^*(B') + 2\epsilon \ . \end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ erkennt man, daß wie behauptet O μ^*–meßbar ist. Daher gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}^*$. Da $\mathcal{E}$ die σ–Algebra $\mathcal{B}$ erzeugt, folgt $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$, und wir können μ^* zu einem Maß μ auf $\mathcal{B}$ einschränken.

Schließlich gilt wegen $\mu^*(O) \geq \pi(O)$ für $O \in \mathcal{E}$ wegen der Subadditivität von π. Die spezielle Wahl $O_1 = O$ in der Definition des äußeren Maßes zeigt

$$\mu^*(O) \ = \ \pi(O) \quad \text{für alle } O \in \mathcal{E} \ ,$$

deswegen stimmt μ auf $\mathcal{E}$ mit π überein. □

Beispiel. Wahrscheinlichkeitsmaße auf der reellen Achse. Die **Verteilungsfunktion** $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eines W-Maßes μ auf $\mathbb{R}$ ist definiert als

$$F(x) \ := \ \mu\big((-\infty, x]\big) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Da die Intervalle der Gestalt $(-\infty, x]$ einen $\cap$–stabilen Erzeuger der Borel–σ–Algebra ergeben, ist μ durch F eindeutig festgelegt. Die Eigenschaften von Verteilungsfunktionen ergeben sich aus denen von Maßen,

i) F ist monoton wachsend,

ii) F ist rechtsstetig: $F(x) = F(x+) := \lim_{y \downarrow x} F(y)$,

iii) $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Wir zeigen nun:
Zu jeder monotonen, rechtstetigen Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *mit* $F(\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$ *gibt es genau ein W–Maß* μ*, dessen Verteilungsfunktion sie ist.*

Beweis. Wir zeigen, daß durch

$$\pi\big((a,b]\big) \ := \ F(b) - F(a) \quad a \le b \ ,$$

ein Prämaß auf dem System $\mathcal{E} := \{(a,b] : a \le b\}$ aller endlichen, halboffenen Intervalle gegeben ist. Offenbar gilt $\pi(\emptyset) = \pi\big((a,a]\big) = 0$. Für $O, V \in \mathcal{E}$ ist auch $O' := O \cap V$ und $O'' := O \cap V^c$ in $\mathcal{E}$ und es gilt offenbar

$$\pi(O') + \pi(O'') \ = \ \pi(O) \ .$$

Es bleibt, Subadditivität zu zeigen. Seien $O = (a,b], O_1 = (a_1, b_1], O_2 = (a_2, b_2], \dots$ derart, daß $O \subset \bigcup_n O_n$ und sei $\epsilon > 0$. Wegen der Rechtsstetigkeit gibt es $\epsilon_n > 0$, so daß $F(b_n + \epsilon_n) \le F(b) + \epsilon 2^{-n}$. Die Intervalle $(a_n, b_n + \epsilon_n)$ bilden dann eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a+\epsilon/2, b]$, die folglich eine endliche Teilüberdeckung $(a_1, b_1 + \epsilon_1), \dots, (a_r, b_r + \epsilon_r)$ enthält. Es folgt $(a+\epsilon, b] \subset (a_1, b_1 + \epsilon_1] \cup \dots \cup (a_r, b_r + \epsilon_r]$ und

$$F(b) - F(a+\epsilon) \ \le \ \sum_{i=1}^{r} (F(b_i + \epsilon_i) - F(a_i)) \ \le \ \sum_{i=1}^{r} (F(b_i) - F(a_i)) + \epsilon \ .$$

Der Grenzübergang $r \to \infty$ und dann $\epsilon \to 0$ ergibt unter Beachtung der Rechtsstetigkeit

$$\pi\big((a,b]\big) \ \le \ \sum_{n=1}^{\infty} \pi\big((a_n, b_n]\big) \ ,$$

also die behauptete Subadditivität.

π läßt sich folglich zu einem Maß μ auf der Borel–σ–Algebra fortsetzen. Wegen $\mu\big((-\infty, x]\big) = \lim_n \mu\big((-n, x]\big) = F(x) - F(-\infty) = F(x)$ ist F die Verteilungsfunktion von μ. Wegen $\mu(\mathbb{R}) = F(\infty) = 1$ handelt es sich um ein W–Maß. □

Beispiel. Äußere Regularität. Sei μ endliches Maß auf einer Borel–σ–Algebra $\mathcal{B}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße ist dann μ eindeutig durch seine Werte auf offenen Mengen gegeben. Genauer gilt

$$\mu(B) \;=\; \inf\{\mu(O) : O \supset B, O \text{ ist offene Teilmenge von } S\}$$

für alle Borel–Mengen B. Diese Eigenschaft heißt **äußere Regularität** von μ.

Beweis. Sei π die Einschränkung von μ auf das System $\mathcal{E}$ aller offenen Teilmengen des Grundraumes S. Dann ist π Prämaß. Zum Beweis betrachten wir offene Mengen $O, V \subset S$. Dann sind auch $O' := O \cap V$ und $O'' := O \cap (V^c)^\delta$ für $\delta > 0$ offen (B^δ bezeichnet die offene δ–Umgebung von B). Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für δ ausreichend klein $\mu(O'') \le \mu(O \cap V^c) + \epsilon$, und es folgt die eine Eigenschaft von Prämaßen: $O \cap V \subset O'$, $O \cap V^c \subset O''$ und

$$\pi(O') + \pi(O'') \;\le\; \mu(O \cap V) + \mu(O \cap V^c) + \epsilon \;=\; \pi(O) + \epsilon\ .$$

Die andere Eigenschaft, die Subadditivität, überträgt sich von μ direkt auf π. Nach der Methode von Caratheodory können wir also π fortsetzen zu einem Maß ν mit

$$\nu(B) \;=\; \inf\Big\{\sum_n \mu(O_n) : \bigcup_n O_n \supset B, O_n \text{ ist offene Teilmenge von } S\Big\}\ .$$

Da μ und ν definitionsgemäß auf den offenen Mengen übereinstimmen, folgt nach dem Eindeutigkeitssatzs für Maße $\mu = \nu$. Die Behauptung folgt nun unter Beachtung von $\mu(B) \le \mu(\bigcup_n O_n) \le \sum_n \mu(O_n)$, sofern $B \subset \bigcup_n O_n$, und der Bemerkung, daß mit $O_1, O_2, \ldots$ auch $\bigcup_n O_n$ offen ist. $\square$